

Berechnung der stationären, mehrdimensionalen Wärmeleitung mittels Formkoeffizienten bei einer beliebigen Anzahl von Oberflächen und unterschiedlichen Randbedingungen

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, Jößnitz (Plauen) – Februar 2012

In einem beliebig berandeten Körper mit n Oberflächen, an denen Randbedingungen 1. bis 3. Art anliegen, bildet sich im stationären Zustand ein eindeutiges Temperaturfeld aus. Im günstigsten Fall lässt sich dieses analytisch durch Lösen der LAPLACESchen Differenzialgleichung berechnen. Bei komplizierter Geometrie und unterschiedlichen Randbedingungen ist dies aber nicht möglich. Näherungslösungen wurden in der Vergangenheit oftmals mit elektrischen Analogiemodellen ermittelt, in der Gegenwart werden dazu meistens numerisch arbeitende Simulationsmodelle verwendet. Mit Kenntnis des Temperaturfeldes sind auch die Wärmeströme berechenbar. In vielen Fällen interessieren den Anwender ohnehin nur die sich einstellenden Wärmeströme und/oder punktuelle Ortstemperaturen. Zu diesen Ergebnissen gelangt man auch mittels einfacher Kalkulationsprogramme, wenn einmalig ermittelte Formkoeffizienten für den Körper und die thermischen Randbedingungen vorliegen. Diese Methodik ist grundsätzlich bekannt, z. B. [1, 2, 3], ihre Anwendung aber begrenzt. Die Verfahrensweise wird nachfolgend in erweiterter, vereinheitlichter Form anschaulich dargestellt.

1 Definition der Struktur

- Es wird von einem Körper beliebiger Gestalt (Bild 1) mit n Oberflächen ausgegangen, denen Randbedingungen 1. bis 3. Art aufgeprägt sind. Weitere Oberflächen mit der Wärmestromdichte null können vorhanden sein (adiabate Flächen oder thermische Symmetrieflächen). Der Festkörper ist frei von Wärmequellen bzw. -senken.
- Der Körper kann von Kanälen durchdrungen sein, wobei deren Oberflächen Bestandteil der n Oberflächen sind.
- Der Festkörper kann aus Bereichen unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit bestehen.
- An der jeweiligen Oberfläche i gelten zeitunabhängige Größen, so für die Randbedingung 1. Art die Oberflächentemperatur t_i , 2. Art die Wärmestromdichte \dot{q}_i sowie 3. Art die Fluidtemperatur t_{Fi} mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α_i .
Alle genannten Größen sind konstant über die Oberfläche i oder aber stellen Mittelwerte nach einer festdefinierten Ortsfunktion (aber keine Temperaturfunktion!) dar.

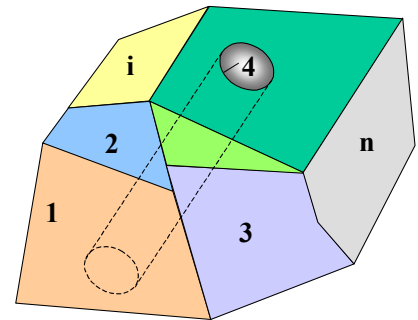


Bild 1 Beliebiger Körper mit einer Durchdringung (Kanal) und n Oberflächen

Im Weiteren wird die Körpergeometrie mit den örtlich zugeordneten Wärmeleitfähigkeiten und die Arten der thermischen Randbedingungen an den Körperoberflächen unter dem Begriff *Struktur* zusammengefasst. Nach ihrer *objektbezogenen* Festlegung gilt sie unabänderlich für alle Untersuchungen und die sich anschließenden Anwendungen.

2 Grundüberlegungen

- Mit der Vorgabe der Struktur und den zugehörigen thermischen Größen an den Oberflächen

ist das Temperaturfeld im Körper *eineindeutig* determiniert.

- Die stationäre Wärmeleitung kann mit linearen Zusammenhängen beschrieben werden, da der Wärmestrom nach dem FOURIERSches Erfahrungsgesetz linear von Temperaturdifferenzen und Wärmeleitkoeffizienten (z. B. Querschnittsfläche \times Wärmeleitfähigkeit) abhängig ist.
- Bei stationärer Wärmeleitung gilt Superposition.

2.1 Einfache Veranschaulichung

Es wird eine Struktur mit $n = 5$ Oberflächen (Bild 2) verwendet. An den Flächen 1, 3 und 5 liegen Randbedingungen 1. Art an. An den Flächen 2 und 4 seien Randbedingungen 3. Art symbolisch dargestellt. Man kann sich den Wärmeübergangswiderstand $1/\alpha_i$ als zusätzlichen Wärmeleitwiderstand an der Oberfläche vorstellen, der Bestandteil der Struktur ist. Eine Änderung von α_i würde eine neue Struktur bedingen. An der Fläche 2 wurde ein Wärmeübergangskoeffizient als Ortsfunktion angedeutet. Er gilt unveränderlich für die untersuchte Struktur.

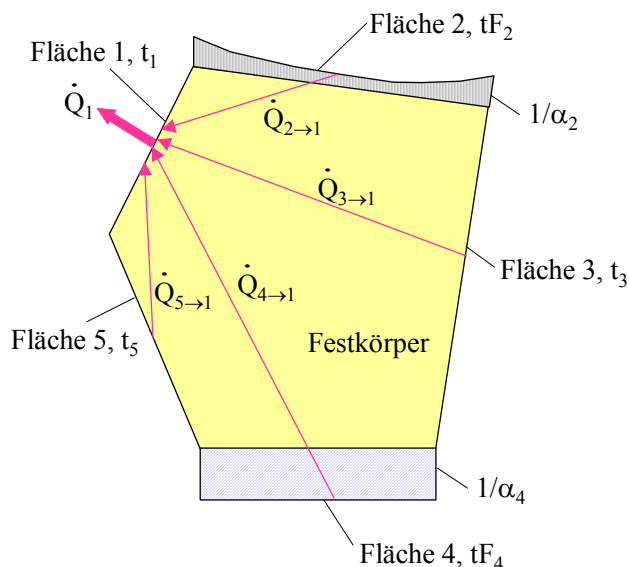


Bild 2 Struktur mit fünf Oberflächen und Kennzeichnung der Wärmeströme von den Flächen 2 bis 5 an die Fläche 1

Wären die Temperaturen t_1 , tF_2 , t_3 und tF_4 gleich, erhielte die Fläche 1 lediglich einen Wärmestrom

$$\dot{Q}_{5 \rightarrow 1} = a_{15} (t_5 - t_1).$$

Analog kann man bei unterschiedlichen Temperaturen superponieren:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} + \dot{Q}_{3 \rightarrow 1} + \dot{Q}_{4 \rightarrow 1} + \dot{Q}_{5 \rightarrow 1} = a_{12} (tF_2 - t_1) + a_{13} (t_3 - t_1) + a_{14} (tF_4 - t_1) + a_{15} (t_5 - t_1). \quad (1)$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$\dot{Q}_1 = -(a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) t_1 + a_{12} tF_2 + a_{13} t_3 + a_{14} tF_4 + a_{15} t_5.$$

Mit $a_{11} = -(a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15})$ folgt:

$$\dot{Q}_1 = a_{11} t_1 + a_{12} tF_2 + a_{13} t_3 + a_{14} tF_4 + a_{15} t_5. \quad (2)$$

Die Gl. (2) kann selbstverständlich auch für die übrigen, thermisch aktiven Oberflächen angeschrieben werden. Beispielsweise gelten schrittweise:

$$\dot{Q}_4 = \dot{Q}_{1 \rightarrow 4} + \dot{Q}_{2 \rightarrow 4} + \dot{Q}_{3 \rightarrow 4} + \dot{Q}_{5 \rightarrow 4} = a_{41} (t_1 - tF_4) + a_{42} (tF_2 - tF_4) + a_{43} (t_3 - tF_4) + a_{45} (t_5 - tF_4). \quad (3)$$

$$a_{44} = -(a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{45})$$

$$\dot{Q}_4 = a_{41} t_1 + a_{42} tF_2 + a_{43} t_3 + a_{44} tF_4 + a_{45} t_5. \quad (4)$$

2.2 Verallgemeinerung für Strukturen mit den Randbedingungen 1. und 3. Art

Allgemein kann man zur Berechnung der Wärmeströme die Gleichungssysteme anschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + a_{13} t_3 + \dots + a_{1j} t_j + \dots + a_{1n} t_n \\ \dot{Q}_2 &= a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + a_{23} t_3 + \dots + a_{2j} t_j + \dots + a_{2n} t_n \\ &\vdots \\ \dot{Q}_i &= a_{i1} t_1 + a_{i2} t_2 + a_{i3} t_3 + \dots + a_{ij} t_j + \dots + a_{in} t_n \\ &\vdots \\ \dot{Q}_n &= a_{n1} t_1 + a_{n2} t_2 + a_{n3} t_3 + \dots + a_{nj} t_j + \dots + a_{nn} t_n \end{aligned} \quad (5)$$

bzw. in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_i \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Bei Randbedingungen 3. Art ist an der entsprechenden Oberfläche – beispielsweise i – die Temperatur t_i durch die Fluidtemperatur tF_i zu ersetzen und selbstverständlich bei der Struktur der zutreffende Wärmeübergangskoeffizient α_i zu berücksichtigen.

Anmerkung 1:

Die Koeffizienten a_{ij} werden *Formkoeffizienten* genannt. Eigentlich wäre die Bezeichnung Strukturkoeffizienten im Sinne der Strukturdefinition zutreffender, aber der Begriff Formkoeffizienten ist bereits für Berechnungen der stationären Wärmeleitung mit zwei Oberflächen etabliert [1, 2].

Anmerkung 2:

Die Formkoeffizienten sind hier dimensionsbehaftet. Die Einheiten ergeben sich automatisch, wenn die zu verwendenden Einheiten für die Temperaturen und Wärmeströme im Vorfeld der Berechnung festgelegt werden (z. B. t_i in °C, \dot{Q}_i in W \rightarrow a_{ij} in W/K). (Bei Erweiterungen der Formkoeffizienten-Methodik können auch dimensionslose Formkoeffizienten auftreten.)

Ebenfalls ist die Richtung der Wärmeströme vorab zu definieren (z. B. $\dot{Q}_i > 0$ bei Wärmestrom von der Struktur an die Umgebung).

Diese Vorabfestlegungen sind für die Ermittlungen der Formkoeffizienten und für die späteren Anwendungsrechnungen *strukturbezogen* gültig.

Feststellungen zur Koeffizientenmatrix:

- Die Matrix ist quadratisch vom Typus n,n . Sie beinhaltet die n^2 Formkoeffizienten für ein stationäres Wärmeleitproblem in einer beliebig gestalteten und stofflich zusammengesetzten Struktur mit n Oberflächen vorgegebener Temperaturen.
- Die Matrix ist symmetrisch, d. h., die Koeffizienten spiegeln sich an der Hauptdiagonale.

Vergleicht man die Gln. (1) und (3), so ergeben sich die Identitäten:

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow 1} = a_{14} (t_{F4} - t_1) = -\dot{Q}_{1 \rightarrow 4} = -a_{41} (t_1 - t_{F4}) \text{ und } a_{14} = a_{41}.$$

Allgemein gilt entsprechend:

$$a_{ij} = a_{ji} . \quad (7)$$

- Die Summe der Koeffizienten muss zeilenweise null sein, denn sind alle Oberflächentemperaturen gleich ($t_1 = t_i = t_n$), sind auch alle Wärmeströme null. Somit gilt:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, \text{ wenn } j \neq i}^n a_{ij} . \quad (8)$$

- Damit sind nur die in der Matrix der Gl. (6) gekennzeichneten Koeffizienten zu bestimmen. Ihre Anzahl berechnet sich nach der Beziehung $(n^2 - n)/2$.

Man kann dies auch anschaulich mit Hilfe von Bild 3 darstellen.

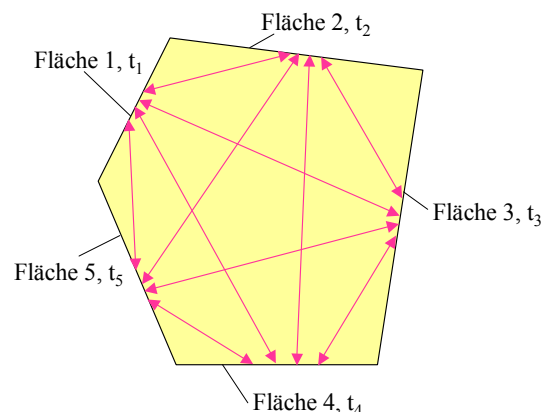


Bild 3 Struktur mit fünf Oberflächen und Kennzeichnung der möglichen Wärmeströme zwischen den Flächen 1 bis 5

Die Anzahl der theoretisch möglichen Wärmestrombeziehungen zwischen den Flächen 1 bis 5 beträgt: **10**.

Diese Zahl folgt für $n = 5$ auch aus der angegebenen Beziehung:

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{5^2 - 5}{2} = \mathbf{10}.$$

D. h., die zu bestimmende Mindestzahl von Formkoeffizienten entspricht den theoretisch möglichen Wärmestrombeziehungen zwischen den Oberflächen der Struktur.

Somit kann man die Koeffizientenmatrix durch eine Untersuchung von $n-1$ Temperaturregimen gewinnen, die untereinander keine Linearkombinationen darstellen.

Um eine Kontrollmöglichkeit der Matrixkoeffizienten zu haben, sollte jedoch eine Untersuchung von n unterschiedlichen Temperaturregimen erfolgen. Geht man beispielsweise von experimentell oder numerisch ermittelten Ausgangsdaten aus, die Abweichungen enthalten können, so ist durch Mittelung der gespiegelten Koeffizienten (Gl. (7)) eine Glättung möglich.

Außerdem könnte mit Gl. (8) die Zeilensumme auf null verändert werden.

- Aufgrund der in den Gln. (7) und (8) beschriebenen Matriceigenschaften ist gewährleistet, dass die Summe aller Wärmeströme null ergibt, was den stationären Wärmeleitvorgang bestätigt.

Sonderfall:

Handelt es sich um einem Festkörper aus einem *homogenen Stoff* und nur um *Randbedingungen 1. Art*, dann ist es möglich, zunächst mit einem λ_0 zu arbeiten, und am Rechnungsende eine Umrechnung vorzunehmen. Es gilt bekannterweise:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ t_i \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda_0} \dot{Q}_1 \\ \cdot \\ \frac{\lambda}{\lambda_0} \dot{Q}_i \\ \cdot \\ \frac{\lambda}{\lambda_0} \dot{Q}_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

3 Beispiel 1

Die Wärmeleitung in einer ebenen, homogenen Wand sei mit der neuen Methode zu bestimmen (Bild 4).

Es werden mit bekannten Berechnungsansätzen zwei Lösungen (Fall 1 und 2) zur Bestimmung der Koeffizienten ermittelt und eine weitere Lösung (Fall 3) zur nachträglichen Kontrolle bereitgestellt (Tabelle 1).

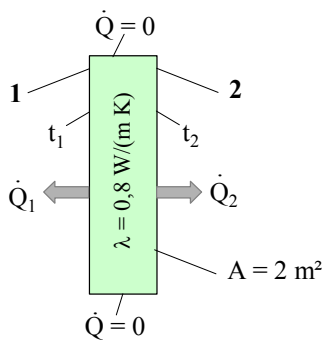


Tabelle 1 Temperaturen und Wärmeströme an den Strukturflächen für Beispiel 1 (Wärmeströme > 0 bei Austritt aus dem Festkörper)

	t ₁ °C	t ₂ °C	Q̇ ₁ W	Q̇ ₂ W
Fall 1	40	20	-32	+32
Fall 2	30	20	-16	+16
Fall 3	5	35	+48	-48

Bild 4 Wärmeleitung in einer ebenen, homogenen Wand

Die Gln. (5) liefern für Fall 1 und 2:

-32 = 40 a ₁₁ + 20 a ₁₂	Lösung →	a ₁₁ = -1,6
-16 = 30 a ₁₁ + 20 a ₁₂		a ₁₂ = +1,6
+32 = 40 a ₂₁ + 20 a ₂₂	Lösung →	a ₂₁ = +1,6
+16 = 30 a ₂₁ + 20 a ₂₂		a ₂₂ = -1,6

Damit erhält Gl. (6) folgendes Aussehen: $\begin{pmatrix} -1,6 & +1,6 \\ +1,6 & -1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$.

Für $t_1 = 5 \text{ °C}$ und $t_2 = 35 \text{ °C}$ ergibt sich nach den Rechenregeln für Matrizen:

$$\dot{Q}_1 = (-1,6 \cdot 5 + 1,6 \cdot 35) \text{ W} = 48 \text{ W} \text{ (fließt durch die Oberfläche 1 an die Umgebung)}$$

$$\dot{Q}_2 = (1,6 \cdot 5 - 1,6 \cdot 35) \text{ W} = -48 \text{ W} \text{ (fließt durch die Oberfläche 2 in den Körper).}$$

Das Ergebnis stimmt mit Fall 3 überein. Selbstverständlich kann man mit diesem Beispiel nicht den Vorteil des neuen Verfahrens demonstrieren, lediglich seine Handhabung.

Durch Nutzen der Gln. (7) und (8) wäre man bei diesem Beispiel nur mit den Angaben des Falles 1 ausgekommen, um die Matrix mit allen vier Formkoeffizienten aufzustellen.

4 Beispiel 2

Ein 1 m langes Fantasiebauteil hat den im Bild 5 gezeigten Querschnitt mit zwei Kanälen im Inneren. Beide Stirnseiten sind ideal wärmegeklämt, sodass jeweils $\dot{Q} = 0$ gilt. Somit existieren 5 Oberflächen mit determinierten Temperaturen. Die Wärmeleitfähigkeit λ ist im Querschnitt bereichsabhängig (0 bzw. 1 W/(m K)).

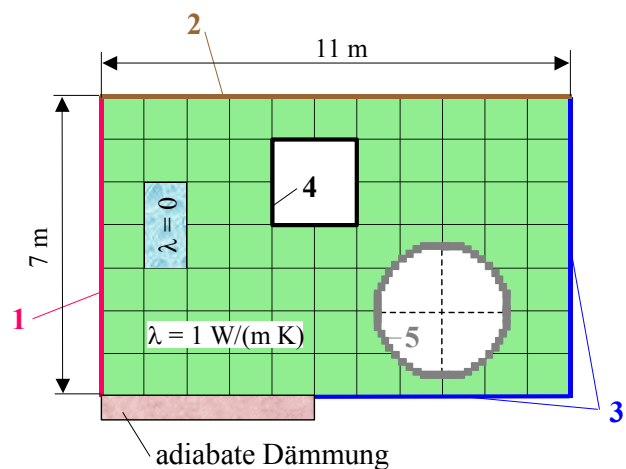


Bild 5 Fantasiebauteil mit fünf thermisch aktiven Oberflächen (Berührungslängen zur Struktur: Fläche 1: 7 m; Fläche 2: 11 m; Fläche 3: 13 m; Fläche 4: 8 m; Fläche 5: 12 m)

Für fünf verschiedene Temperaturvarianten, die keine Linearkombinationen darstellen, sind fünf numerische Simulationen mit dem in [5] veröffentlichten Rechenprogramm durchgeführt worden. Die zugrunde gelegten Temperaturen und die Simulationsergebnisse finden sich in der nachfolgenden Tabelle 2.

Tabelle 2 Temperaturen und Wärmeströme an den Körperoberflächen gemäß Simulationen des Beispiels 2 (Wärmeströme von der Struktur an die Umgebung > 0)

	t_1 °C	t_2 °C	t_3 °C	t_4 °C	t_5 °C	\dot{Q}_1 W	\dot{Q}_2 W	\dot{Q}_3 W	\dot{Q}_4 W	\dot{Q}_5 W
Variante 1	50	40	30	100	10	-13,5	226,7	-100,1	-439,8	326,6
Variante 2	30	40	50	100	10	67,3	227,4	-332,6	-443,5	481,3
Variante 3	40	80	30	10	100	112,6	-548,3	699,9	453,4	-717,7
Variante 4	100	10	30	30	40	-330,4	431,0	29,1	-27,9	-101,9
Variante 5	60	-10	10	30	60	-237,5	469,9	346,8	-102,3	-476,9
Zusatzvariante für eine Kontrollrechnung										
Variante 6	10	20	30	40	50	54,6	95,3	126,2	-82,6	-193,6

Hieraus ergeben sich fünf Gleichungssysteme zur Bestimmung aller Formkoeffizienten. Auf der Basis von Gl. (5) erfolgt die Ermittlung der Koeffizienten. Für die erste und letzte Koeffizientenzeile werden in Tabelle 3 die Bestimmungsgleichungen und die Ergebnisse vorgestellt. Da es sich um lineare Gleichungssysteme handelt, ist die Lösung mittels gängiger Löser z. B. [6] schnell zu finden.

Tabelle 3 Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der Formkoeffizienten mit den Werten nach Tabelle 2

$50 a_{11} + 40 a_{12} + 30 a_{13} + 100 a_{14} + 10 a_{15} = -13,5$	$a_{11} = -3,8673966942$
$30 a_{11} + 40 a_{12} + 50 a_{13} + 100 a_{14} + 10 a_{15} = 67,3$	$a_{12} = 3,0482880756$
$40 a_{11} + 80 a_{12} + 30 a_{13} + 10 a_{14} + 100 a_{15} = 112,6$	$a_{13} = 0,1726033058$
$100 a_{11} + 10 a_{12} + 30 a_{13} + 30 a_{14} + 40 a_{15} = -330,4$	$a_{14} = 0,5144923259$
$60 a_{11} - 10 a_{12} + 10 a_{13} + 30 a_{14} + 60 a_{15} = -237,5$	$a_{15} = 0,1310979929$
.	
$50 a_{51} + 40 a_{52} + 30 a_{53} + 100 a_{54} + 10 a_{55} = 326,6$	$a_{51} = 0,1307438017$
$30 a_{51} + 40 a_{52} + 50 a_{53} + 100 a_{54} + 10 a_{55} = 481,3$	$a_{52} = 0,4819598583$
$40 a_{51} + 80 a_{52} + 30 a_{53} + 10 a_{54} + 100 a_{55} = -717,7$	$a_{53} = 7,8657438017$
$100 a_{51} + 10 a_{52} + 30 a_{53} + 30 a_{54} + 40 a_{55} = -101,9$	$a_{54} = 1,662201889$
$60 a_{51} - 10 a_{52} + 10 a_{53} + 30 a_{54} + 60 a_{55} = -476,9$	$a_{55} = -10,1408087367$

Mit den ermittelten Koeffizienten kann die Gleichung zur Berechnung aller Wärmeströme in Abhängigkeit der Oberflächentemperaturen des Körpers gemäß Gl. (6) angeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} -3,8674 & 3,0483 & 0,1726 & 0,5145 & 0,1311 \\ 3,0481 & -10,6411 & 3,0831 & 4,0262 & 0,4831 \\ 0,1737 & 3,0839 & -11,4513 & 0,3275 & 7,8651 \\ 0,5139 & 4,0256 & 0,3289 & -6,5301 & 1,6623 \\ 0,1307 & 0,4820 & 7,8657 & 1,6622 & -10,1408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Gl. (10) stellt die Lösung für Beispiel 2 dar. Anhand der bereits durch Simulation ermittelten Variante 6 ist in Tabelle 4 eine Überprüfung mittels Excel erfolgt.

Tabelle 4 Überprüfung der Lösung für Beispiel 2 anhand der Temperaturvariante 6

Temperaturvariante 6						Q in W		Koeffizienten- summe
						nach Gl. (10)	Simulation	
Oberfläche 1								
a11 ... a15 =	-3,8674	3,0483	0,1726	0,5145	0,1311			-0,0009
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
a11* t1 ... a15* t5 =	-38,674	60,966	5,178	20,580	6,555	Q1 =	54,6	54,6
Oberfläche 2								
a21 ... a25 =	3,0481	-10,6411	3,0831	4,0262	0,4831			-0,0006
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
a21* t1 ... a25* t5 =	30,481	-212,822	92,493	161,048	24,155	Q2 =	95,4	95,3
Oberfläche 3								
a31 ... a35 =	0,1737	3,0839	-11,4513	0,3275	7,8651			-0,0011
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
a31* t1 ... a35* t5 =	1,737	61,678	-343,539	13,100	393,255	Q3 =	126,2	126,2
Oberfläche 4								
a41 ... a45 =	0,5139	4,0256	0,3289	-6,5301	1,6623			0,0006
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
a41* t1 ... a45* t5 =	5,139	80,512	9,867	-261,204	83,115	Q4 =	-82,6	-82,6
Oberfläche 5								
a51 ... a55 =	0,1307	0,4820	7,8657	1,6622	-10,1408			-0,0002
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
a51* t1 ... a55* t5 =	1,307	9,640	235,971	66,488	-507,040	Q5 =	-193,6	-193,6

Die notwendige Übereinstimmung der berechneten und der simulierten Wärmeströme ist gegeben. Eventuelle Abweichungen sind durch numerische Fehler in der Simulationsrechnung be-

dingt. Werden die Koeffizienten der Matrix – wie bereits beschrieben – geglättet, ergibt sich gegenüber Gl. (10) nur eine geringfügige Veränderung:

$$\begin{pmatrix} -3,8665 & 3,0482 & 0,1732 & 0,5142 & 0,1309 \\ 3,0482 & -10,6401 & 3,0835 & 4,0259 & 0,4825 \\ 0,1732 & 3,0835 & -11,4503 & 0,3282 & 7,8654 \\ 0,5142 & 4,0259 & 0,3282 & -6,5305 & 1,6622 \\ 0,1309 & 0,4825 & 7,8654 & 1,6622 & -10,1410 \end{pmatrix}.$$

Eine prinzipielle Ergebnisverbesserung tritt bei diesem Beispiel nicht auf.

5 Wärmetechnische Erkenntnisse aus den Formkoeffizienten

Die Größe des Betrages der Formkoeffizienten a_{ij} ($i \neq j$) spiegelt die Intensität der thermischen Kopplung zwischen den Oberflächen i und j wider.

Wird beispielsweise der im Bild 5 dargestellte Festkörper in seinem Aufbau – wie im Bild 6 gezeigt – verändert, so bedeutet dies eine wirksamere "thermische Abschirmung" der Oberfläche 1.

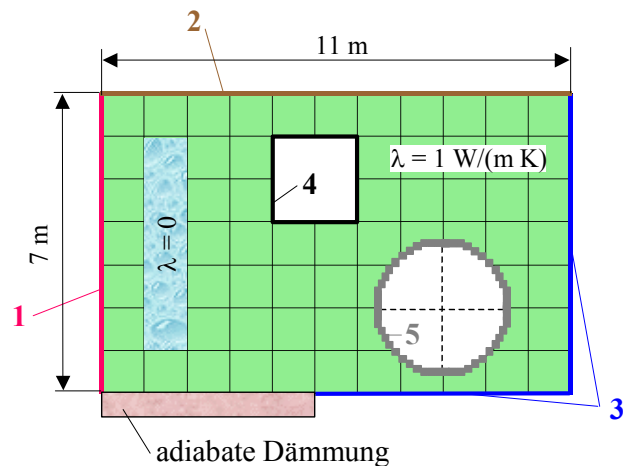


Bild 6 Fantasiebauteil nach Bild 5 mit vergrößertem wärmeundurchlässigen Innenbereich ($\lambda = 0$)

Eine Wiederholung des Beispiels 2 unter den veränderten Bedingungen ergibt die in Tabelle 5 vermerkten Änderungen der Formkoeffizienten.

Tabelle 5 Gegenüberstellung der Formkoeffizienten $a_{11} \dots a_{15}$ bei Strukturen nach Bild 5 bzw. 6

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Struktur nach Bild 6: größerer Bereich mit $\lambda = 0$ → wirksamere Abschirmung der Oberfläche 1 → kleinere Beträge der Formkoeffizienten $a_{11} \dots a_{15}$				
-3,1804	2,8552	0,0946	0,1663	0,0640
Struktur nach Bild 5: (kleiner Bereich mit $\lambda = 0$)				
-3,8674	3,0483	0,1726	0,5145	0,1311

Das Produkt aus Formkoeffizient und zugehöriger Temperaturdifferenz gibt den partiellen Wärmestrom an.

Aufgrund der in den Gln. (7) und (8) vorgestellten Eigenschaften der Koeffizientenmatrix gelten:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_1 &= \quad \quad \quad a_{12}(t_2 - t_1) + a_{13}(t_3 - t_1) + \dots + a_{1n}(t_n - t_1) \\
\dot{Q}_2 &= a_{21}(t_1 - t_2) \quad \quad \quad + a_{23}(t_3 - t_2) + \dots + a_{2n}(t_n - t_2) \\
\dot{Q}_3 &= a_{31}(t_1 - t_3) + a_{32}(t_2 - t_3) \quad \quad \quad + \dots + a_{3n}(t_n - t_3) \\
\dot{Q}_n &= a_{n1}(t_1 - t_n) + a_{n2}(t_2 - t_n) + a_{n3}(t_3 - t_n) + \dots \quad \quad \quad
\end{aligned} \tag{11}$$

Hinweis: Alle Terme mit a_{ii} fehlen! Rein rechentechnisch könnte man diese auch belassen, da ohnehin $(t_i - t_i) = 0$ gilt.

Die einzelnen Produkte stellen die partiellen Wärmeströme an die Flächen i dar und weisen auf deren Herkunft hin.

Gemäß Beispiel 2, Temperaturvariante 6 ergeben sich für die Fläche $i = 1$ nach Gl. (11), erste Zeile beispielsweise:

$$\dot{Q}_1 = \underbrace{[3,0483(20 - 10)]}_{\text{von Fläche 2}} + \underbrace{[0,1726(30 - 10)]}_{\text{von Fläche 3}} + \underbrace{[0,5145(40 - 10)]}_{\text{von Fläche 4}} + \underbrace{[0,1311(50 - 10)]}_{\text{von Fläche 5}} \text{ W} = 54,6 \text{ W}.$$

6 Berechnungsverfahren bei Randbedingungen 2. Art

In Sonderfällen kann die Wärmestromdichte an einer oder mehreren Oberflächen der Struktur vorgegeben sein. Die Wärmestromdichte \dot{q}_i ist über die jeweilige Fläche A_i als konstant oder als Mittelwert nach einer unabänderlichen Ortsverteilung determiniert. Ihre Richtung ist wiederum vorab festzulegen, sie sei beispielsweise an die Struktur als positiv definiert.

Mit $\dot{q}_i \times A_i$ ist auch der Wärmestrom an den Festkörper bekannt. Somit entfällt die Berechnung von \dot{Q}_i mit dem Algorithmus nach Gln. (5). D. h., das Gleichungssystem kann um die entsprechende Zeile reduziert werden. Bei beispielsweise zwei Oberflächen mit einer bekannten Randbedingung 2. Art wären nur $n - 2$ Gleichungen zu betrachten.

Die in die Struktur "zwangsweise" eingespeisten Wärmeströme bewirken natürlich eine Veränderung des Temperaturfeldes im Festkörper mit den sonst aufgeprägten Oberflächen- und/oder Fluidtemperaturen. Daraus ergeben sich veränderte Wärmeströme an den verbleibenden Oberflächen mit Randbedingungen 1. oder 3. Art. Diese "Störgrößen" sind bei der Bestimmung der Formkoeffizientenmatrix natürlich zu berücksichtigen.

Werden beispielsweise die Flächen A_2 und A_n mit einer konstanten Wärmestromdichte \dot{q}_2, \dot{q}_n belegt, entfallen die entsprechenden Berechnungsgleichungen für \dot{Q}_2 und \dot{Q}_n . In den verbleibenden Gleichungen müssen aber die Koeffizienten a_{i2} und a_{in} erhalten bleiben, um die Einflüsse der bekannten Wärmestromdichten zu berücksichtigen.

Die Einheiten der dimensionsbehafteten Formkoeffizienten unterscheiden sich dann allerdings voneinander. So gelten beispielsweise für a_{in} $[\text{W}/(\text{W}/\text{m}^2) \equiv \text{m}^2]$ und für a_{i1} $[\text{W}/\text{K}]$. Diese ergeben sich aber automatisch, wenn stets die anfangs vereinbarten Einheiten für die Größen gewählt und beibehalten werden.

Die Gln. (5) und (6) nehmen beispielsweise die folgenden Formen an:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= a_{11} t_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} t_3 + \dots + a_{1j} t_j + \dots + a_{1n} \dot{q}_n \\ \dot{Q}_3 &= a_{31} t_1 + a_{32} \dot{q}_2 + a_{33} t_3 + \dots + a_{3j} t_j + \dots + a_{3n} \dot{q}_n \\ \dots \\ \dot{Q}_i &= a_{i1} t_1 + a_{i2} \dot{q}_2 + a_{i3} t_3 + \dots + a_{ij} t_j + \dots + a_{in} \dot{q}_n \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ t_i \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_3 \\ \dots \\ \dot{Q}_i \\ \dots \end{pmatrix} \quad (13)$$

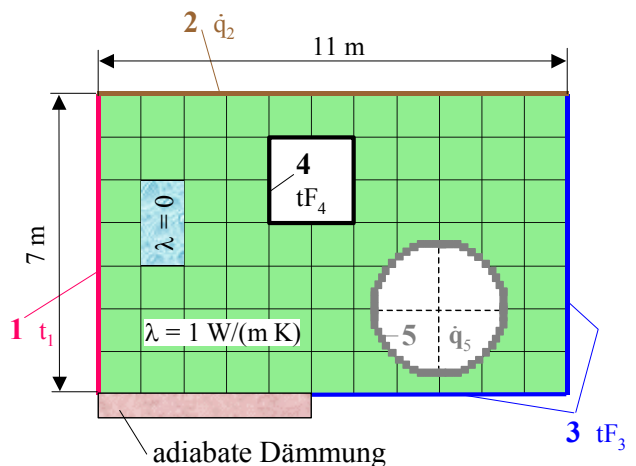
Die 2. und die n-te Matrixzeile existieren nicht!

Es liegt nun keine quadratische Matrix mehr vor, sondern sie ist vom Typus n-2,n. Zur Ermittlung der n × (n-2) Formkoeffizienten a_{ij} werden zeilenweise wiederum n bekannte Lösungen benötigt.

7 Beispiel 3

Es wird wieder die im Bild 5 gezeigte Struktur verwendet. Gegenüber Beispiel 2 sind jeweils zwei Randbedingungen 2. Art und 3. Art ergänzt (Bild 7).

Bild 7 Fantasiebauteil nach Beispiel 2 mit einer Oberfläche der Temperatur t₁, mit zwei Oberflächen, die von Fluiden mit den Temperaturen tF₃ und tF₄ beaufschlagt werden (α₃ = 10 W/(m²K); α₄ = 5 W/(m²K)), und zwei Oberflächen mit dem Eintrag konstanter Wärmestromdichten q̇₂ und q̇₅



In Analogie zum Beispiel 2 sind für fünf unterschiedliche thermische Strukturbelastungen Simulationen erfolgt. Für die Flächen 3 und 4 wurden Randbedingungen 3. Art und für die Flächen 2 und 5 Randbedingungen 2. Art angesetzt. Die verwendeten Temperaturen und Wärmestromdichten sowie die Simulationsergebnisse sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

Tabelle 6 Eingabedaten und Ergebnisse der Simulation für Beispiel 3 (Wärmeströme von der Struktur an die Umgebung und Wärmestromdichten an die Struktur gelten als positiv! Diese gegensätzlichen Definitionen sind zulässig, sie müssen lediglich durchgängig für die Berechnung gelten.)

	t ₁ °C	q̇ ₂ W/m ²	tF ₃ °C	tF ₄ °C	q̇ ₅ W/m ²	Q̇ ₁ W	Q̇ ₂ W	Q̇ ₃ W	Q̇ ₄ W	Q̇ ₅ W
Variante 1*	50	10	30	100	3	64,8	-110,0	144,6	-63,5	-36,0
Variante 2*	30	10	50	100	3	93,6	-110,0	110,2	-57,9	-36,0
Variante 3*	40	20	30	10	30	23,2	-220,0	297,8	259,0	-360,0
Variante 4*	100	2	30	30	12	-75,2	-22,0	128,4	112,7	-144,0
Variante 5*	60	-2	10	30	18	-40,3	22,0	188,2	46,1	-216,0
Zusatzvariante für eine Kontrollrechnung										
Variante 6*	10	20	30	40	50	92,0	-220,0	500,8	227,2	-600,0

Aus den Varianten 1* bis 5* folgen jeweils nach Gl. (12) fünf Gleichungssysteme zur Bestimmung der Formkoeffizienten. Die Lösung von Beispiel 3 gemäß der Gl. (13) lautet:

$$\begin{pmatrix} -1,1855 & 2,2715 & 0,2545 & 0,9290 & 0,2756 \\ 0,2566 & 2,8845 & -1,4634 & 1,2066 & 8,7227 \\ 0,9278 & 5,8417 & 1,2078 & -2,1356 & 3,0058 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \dot{q}_2 \\ tF_3 \\ tF_4 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Die Besonderheit besteht darin, dass die Wärmeströme an den Flächen 2 und 5 unmittelbar aus den vorgegebenen Wärmestromdichten folgen, somit ist die Berechnung mittels Formkoeffizienten irrelevant. Der Wärmestrom an die Umgebung der Fläche i beträgt: $\dot{Q}_i = -A_i \dot{q}_i$. Damit folgen beispielsweise für Variante 6* mit den im Bild 5 vermerkten Flächen:

$$\dot{Q}_2 = -11 \text{ m}^2 \cdot 20 \text{ W/m}^2 = -220 \text{ W}; \quad \dot{Q}_5 = -12 \text{ m}^2 \cdot 50 \text{ W/m}^2 = -600 \text{ W}.$$

Sinnentsprechend könnte man die Formkoeffizientenmatrix durch Spaltentausch und den Variablenvektor durch Zeilentausch – ohne Einfluss auf das Ergebnis zu nehmen – verändern:

$$\begin{pmatrix} -1,1855 & 0,2545 & 0,9290 & 2,2715 & 0,2756 \\ 0,2566 & -1,4634 & 1,2066 & 2,8845 & 8,7227 \\ 0,9278 & 1,2078 & -2,1356 & 5,8417 & 3,0058 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ tF_3 \\ tF_4 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Auf die blau umrandeten Formkoeffizienten, die den Flächen mit vorgegebenen Oberflächen- und/oder angrenzenden Fluidtemperaturen zugeordnet sind, treffen wiederum die im Abschnitt 2.2 beschriebenen Eigenschaften für eine quadratische Matrix zu (Symmetrie zur Hauptdiagonale; zeilenweise Summe gleich null). Im gekennzeichneten Bereich wäre somit auch die früher beschriebene Koeffizientenklärung möglich.

Die Proberechnung mit Gl. (15) für die Variante 6* ist in Tabelle 7 vorgestellt.

Tabelle 7 Überprüfung der Lösung für Beispiel 3 anhand der Temperaturvariante 6*

Temperaturvariante 6*						Q in W		Koeffizienten- summe (Sp. 1...3)
						nach Gl. (15)	Simulation	
Oberfläche 1								
a11 ... a15 =	-1,1855	0,2545	0,9290	2,2715	0,2756			-0,0020
t1 ... q5 =	10	30	40	20	50			
a11* t1 ... a15* q5 =	-11,855	7,635	37,16	45,43	13,78	Q1 =	92,2	92,0
Oberfläche 3								
a31 ... a35 =	0,2566	-1,4634	1,2066	2,8845	8,7227			-0,0002
t1 ... q5 =	10	30	40	20	50			
a31* t1 ... a35* q5 =	2,566	-43,902	48,264	57,69	436,135	Q3 =	500,8	500,8
Oberfläche 4								
a41 ... a45 =	0,9278	1,2078	-2,1356	5,8417	3,0058			0,0000
t1 ... q5 =	10	30	40	20	50			
a41* t1 ... a45* q5 =	9,278	36,234	-85,424	116,834	150,29	Q4 =	227,2	227,2

8 Berechnungsverfahren für Ortstemperaturen innerhalb des Festkörpers

In vielen Fällen sind die Temperaturen innerhalb des Festkörpers an speziellen Orten von Interesse, so beispielsweise wenn Temperaturgrenzwerte für die eingesetzten Materialien existieren. Analog zur bisher vorgestellten Methodik werden auch diese speziellen Ortstemperaturen als lineare Funktionen der thermischen Randbedingungen dargestellt.

Aufbauend auf Abschnitt 2.1 kann man die Wärmestromzuordnungen auch für ein Volumenelement E innerhalb der Struktur anschreiben. Zur Veranschaulichung dient Bild 8.

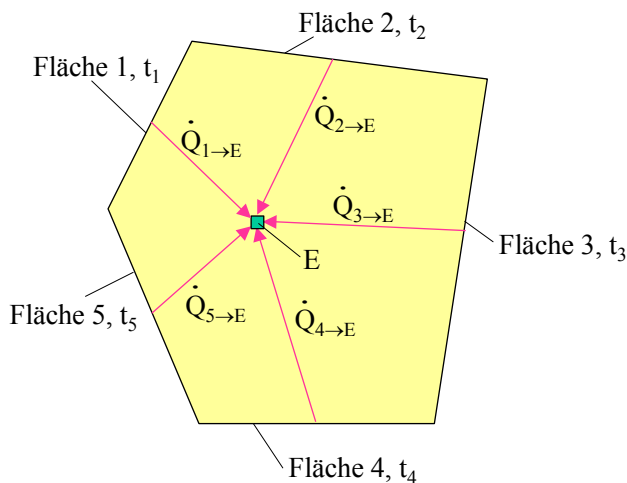


Bild 8 Struktur mit fünf Oberflächen und Kennzeichnung der Wärmeströme von den Flächen 1 bis 5 an das Volumenelement E

Damit gelten analog zu Gl. (1) für die Wärmeströme an das Element, wobei im stationären Fall die Summe null ist:

$$\begin{aligned} & \dot{Q}_{1 \rightarrow E} + \dot{Q}_{2 \rightarrow E} + \dot{Q}_{3 \rightarrow E} + \dot{Q}_{4 \rightarrow E} + \dot{Q}_{5 \rightarrow E} \\ & = b_{E1} (t_1 - t_E) + b_{E2} (t_2 - t_E) + b_{E3} (t_3 - t_E) + b_{E4} (t_4 - t_E) + b_{E5} (t_5 - t_E) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Mit $b_{EE} = b_{E1} + b_{E2} + b_{E3} + b_{E4} + b_{E5}$ kann man auch schreiben:

$$b_{E1} t_1 + b_{E2} t_2 + b_{E3} t_3 + b_{E4} t_4 + b_{E5} t_5 = b_{EE} t_E.$$

Mit $a_{E1} = b_{E1}/b_{EE}$, $a_{E2} = b_{E2}/b_{EE}$ usw. folgt mit den neuen Koeffizienten eine zu Gl. (16) modifizierte Form

$$t_E = a_{E1} t_1 + a_{E2} t_2 + a_{E3} t_3 + a_{E4} t_4 + a_{E5} t_5. \quad (17)$$

Ist das Element infinitesimal klein, dann ist die Elementtemperatur identisch mit der punktuellen Strukturtemperatur am Ort E.

Selbstverständlich gilt diese Beziehung für beliebig viele Orte E, ... , G, ... , Z innerhalb des Festkörpers, sodass sich für eine vorgegebene Struktur mit n Oberflächen und unterschiedlichen Randbedingungen 1. bis 3. Art beispielsweise nachfolgende Berechnungsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} t_E &= a_{E1} t_1 + a_{E2} t_2 + a_{E3} \dot{q}_3 + \dots + a_{Ej} tF_j + \dots + a_{En} \dot{q}_n \\ & \cdot \\ t_G &= a_{G1} t_1 + a_{G2} t_2 + a_{G3} \dot{q}_3 + \dots + a_{Gj} tF_j + \dots + a_{Gn} \dot{q}_n \\ & \cdot \\ t_Z &= a_{Z1} t_1 + a_{Z2} t_2 + a_{Z3} \dot{q}_3 + \dots + a_{Zj} tF_j + \dots + a_{Zn} \dot{q}_n \cdot \end{aligned} \quad (18)$$

In Matrixschreibweise gilt:

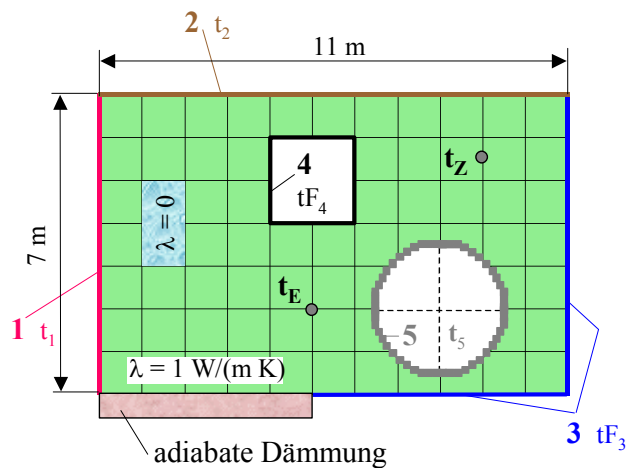
$$\begin{pmatrix} a_{E1} & a_{E2} & a_{E3} & \dots & a_{Ej} & \dots & a_{En} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{G1} & a_{G2} & a_{G3} & \dots & a_{Gj} & \dots & a_{Gn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{Z1} & a_{Z2} & a_{Z3} & \dots & a_{Zj} & \dots & a_{Zn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ tF_2 \\ \dot{q}_3 \\ \cdot \\ tF_j \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_E \\ \cdot \\ t_G \\ \cdot \\ t_Z \end{pmatrix} \quad (19)$$

Bei n Oberflächen sind für jede Ortstemperatur, z. B. t_E , n Formkoeffizienten a_{Ej} zu bestimmen. Zur Ermittlung der Koeffizienten sind einmalig n Regime vorgegebener Temperaturen bzw. Wärmestromdichten zu untersuchen. Diese Untersuchungen können selbstverständlich mit denen für die eventuell auch gesuchten Wärmeströme kombiniert werden.

9 Beispiel 4

Grundlage bildet wiederum das Beispiel 2, wobei an den Oberflächen 3 und 4 Randbedingungen 3. Art gelten. Es sind die Ortstemperaturen an den im Bild 9 gekennzeichneten Stellen E und Z mit Hilfe der Gln. (18) und (19) zu formulieren.

Bild 9 Fantasiebauteil nach Beispiel 2 mit drei Oberflächen der Temperaturen t_1 , t_2 und t_5 sowie mit zwei Oberflächen, die von Fluiden mit den Temperaturen tF_3 und tF_4 beaufschlagt werden ($\alpha_3 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$; $\alpha_4 = 5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$) Die Ortstemperaturen sind an den Stellen E und Z von Interesse.



In Tabelle 8 sind für sechs Temperaturvarianten 1** bis 6** Simulationen durchgeführt worden. Zur Bestimmung der Formkoeffizienten werden die Varianten 1** bis 5** verwendet, Variante 6** sei einer Kontrollrechnung vorbehalten.

Tabelle 8 Oberflächen- bzw. Fluidtemperaturen an den Strukturflächen und ermittelte Simulationsergebnisse für die Ortstemperaturen t_E und t_Z innerhalb des Festkörpers für Beispiel 4

	t_1 °C	t_2 °C	tF_3 °C	tF_4 °C	t_5 °C	t_E °C	t_Z °C
Variante 1**	50	40	30	100	10	44,84	34,90
Variante 2**	30	40	50	100	10	46,36	39,62
Variante 3**	40	80	30	10	100	53,00	67,72
Variante 4**	100	10	30	30	40	41,93	23,58
Variante 5**	60	-10	10	30	60	40,24	14,84
<i>Zusatzvariante für eine Kontrollrechnung</i>							
Variante 6**	10	20	30	40	50	37,73	31,19

Aus den Varianten 1* bis 5* folgen jeweils nach Gl. (18) fünf Gleichungssysteme zur Bestimmung der Formkoeffizienten. Die Matrix der Formkoeffizienten, die aus den Werten der Tabelle 8 folgen, lautet für die beiden Temperaturen t_E und t_Z :

$$\begin{pmatrix} 0,1221 & 0,0197 & 0,1981 & 0,2822 & 0,3777 \\ 0,0003 & 0,4438 & 0,2363 & 0,0761 & 0,2436 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_{F_3} \\ t_{F_4} \\ t_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_E \\ t_Z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Die Formkoeffizienten sind in diesem Beispiel dimensionslos. Eine Überprüfung erfolgt mit der Variante 6** gemäß Tabelle 9. Es ergibt sich völlige Übereinstimmung zwischen den nach Gl. (20) ermittelten Temperaturen und den vorab simulierten Werten.

Tabelle 9 Überprüfung der Lösung für Beispiel 4 anhand der Temperaturvariante 6**

Temperaturvariante 6**						t in °C		
						Ortstemperatur t_E		
aE1 ... aE5 =	0,1221	0,0197	0,1981	0,2822	0,3777			
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
aE1* t1 ... aE5* t5 =	1,221	0,394	5,943	11,288	18,885	$t_E =$	37,73	37,73
Ortstemperatur t_Z								
aZ1 ... aZ5 =	0,0003	0,4438	0,2363	0,0761	0,2436			
t1 ... t5 =	10	20	30	40	50			
aZ1* t1 ... aZ5* t5 =	0,003	8,876	7,089	3,044	12,180	$t_Z =$	31,19	31,19

Fazit

Mit dem vorgestellten Verfahren ist eine umfangreiche Nutzung im Bereich der Wärmetechnik und den verbundenen Fachgebieten möglich.

- Der Hauptvorteil besteht darin, dass mit der einmalig ermittelten Matrix von Formkoeffizienten z. B. für veränderliche Oberflächentemperaturen, Fluidtemperaturen oder Wärmestromdichten, die als Randbedingungen 1. bis 3. Art an den definierten Flächen der Struktur wirken, die Wärmeströme an den Strukturoberflächen und/oder ausgewählte Ortstemperaturen innerhalb des Festkörpers sofort bestimmbar sind. Hierzu genügen einfache Kalkulationsprogramme.
- Für häufig wiederkehrende Konstruktionen aber auch für neu entwickelte Bauteile können Formkoeffizienten ermittelt und den Anwendern zur Nachrechnung, Optimierung usw. zur Verfügung gestellt werden, die im Alltagsgebrauch Simulationsrechnungen erübrigen.
- Große Rechenprogramme mit wiederkehrenden Simulationen stationärer Wärmeleitvorgänge gleichbleibender Strukturen können durch den Einbau entsprechender Subroutinen vereinfacht und im Ablauf beschleunigt werden.

Diese Methode wird beispielsweise bereits bei der wärmetechnischen Berechnung von Erdwärmesonden genutzt [4].

- Die detaillierte Analyse der Formkoeffizienten-Matrix kann zum Aufdecken von wärmetechnischen Schwachstellen und zur Kenntnissteigerung des Wärmetransports in speziellen Bauteilen – beispielsweise auch in Verbundwerkstoffen (Komposite) – genutzt werden.

Literatur

- [1] HAHNE, E., GRIGULL, U.: Formfaktor und Formwiderstand der stationären mehrdimensionalen Wärmeleitung, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, pp. 751-767, Pergamon Press 1975
- [2] HAHNE, E.: VDI-Wärmeatlas (Abschnitt: Zweidimensionale Wärmeleitung), 9. Auflage. Düsseldorf: VDI-Verlag 2002
- [3] HEINDL, W.; KREČ, K.; PANZHAUSER, E.; SIGMUND, A.: Wärmebrücken. Wien New York: Springer-Verlag 1987
- [4] GLÜCK, B.: Formfaktoren zur Simulation von Erdwärmesonden, Heizung-Lüftung-Haus-technik H. 8/2008 sowie in <http://berndglueck.de/erdwaermesonde.php>, Bericht Erdwaermesonde, Abschnitt 4
- [5] GLÜCK, B.: Simulationsprogramm auf der Basis der Finite-Volumen-Methode für die zweidimensionale Wärmeleitung (<http://berndglueck.de/waermeleitung.php>)
- [6] BRÜNNER, A.: Rechner zum Lösen linearer Gleichungssysteme (<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>)