

# Verdunstung von Wasser in die Luft

Bernd Glück, November 2022

Bei der Verdunstung von Wasser – beispielsweise an Wasseroberflächen – handelt es sich um eine spezielle Form des Wärme- und Stoffaustausches. Zwischen beiden besteht eine Kopplung, die durch die Energie- und Stoffbilanz gegeben ist.

Bei den zu betrachtenden Wasser-Luft-Kontakten handelt es sich um thermodynamische Zustandsänderungen in einem Zweistoffgemisch. Es ist eine spezielle Form der Diffusion, die durch einen Konzentrationsunterschied angetrieben wird. Allgemein sind bei der *Diffusion* zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten zu unterscheiden.

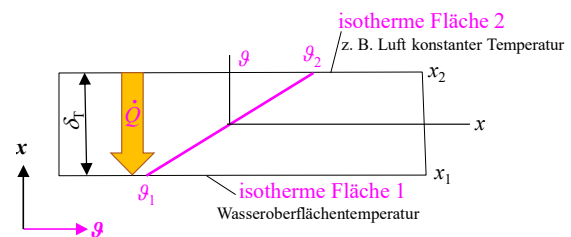
## I. Molekulare Diffusion (Für Nutzer im klimatechnischen Bereich ist dieser Abschnitt nicht relevant!)

Grundsätzlich kann diese in ruhenden Gasen und Flüssigkeiten und sogar in Festkörpern erfolgen, wenn sich die mittleren Molekülgeschwindigkeiten der einzelnen Stoffkomponenten örtlich unterscheiden. Mit zunehmender Zeit wird sich beispielsweise eine eingebrachte Tintenmenge im Wasser gleichmäßig verteilen. Analog bildet sich auch in einem in Luft stehenden, offenen Behälter mit einer Wasserteilfüllung darüber ein Polster eines Wasserdampf-Luft-Gemisches aus. Die genannten Vorgänge kommen zum Stillstand, wenn kein Potenzialunterschied – speziell kein Konzentrationsunterschied – mehr besteht. Die molekulare Diffusion ist somit der bekannten Wärmeleitung völlig analog, sodass deren Gesetzmäßigkeiten direkt übertragbar sind. Es ist eventuell nützlich sich vorab die Differenzialgleichungen für die Wärmeleitung und für die Diffusion nochmals herzuleiten und ihre Analogien zu betrachten.

## Wärmeleitung

Bild 1 veranschaulicht den Vorgang in der thermischen Grenzschicht  $\delta_T$ , die über  $x$  konstante Eigenschaften haben soll. So gelte die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = \text{const}$ . Damit stellt sich ein *linearer* Temperaturverlauf ein

$$\frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\vartheta = \vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\delta_T} (x - x_1)$$
$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\delta_T}$$



**Bild 1** Wärmeleitung in der thermischen Grenzschicht

Der Wärmestrom, der entgegen dem Temperaturgradienten  $d\vartheta/dx$  gerichtet ist, ergibt sich mit der Normalenfläche  $A$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  nach dem bekannten FOURIERSchen Erfahrungsgesetz zu:

$$\dot{Q} = -A \lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad \left( \text{Dargestellter Sonderfall: } \dot{Q} = -A \lambda \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\delta_T} \right). \quad (1)$$

Treten zeitliche Änderungen auf, so ist eine instationäre Betrachtung erforderlich, die Wärmespeichervorgänge einschließt. Hierzu wird eine infinitesimal dicke Schicht  $dx$  über den

Zeitraum  $dt$  in nachfolgenden Berechnungsschritten betrachtet:

$$\dot{Q}_x = -A \lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad ; \quad \frac{d\dot{Q}_x}{dx} = -A \lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx = -A \lambda \frac{d\vartheta}{dx} - A \lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx$$

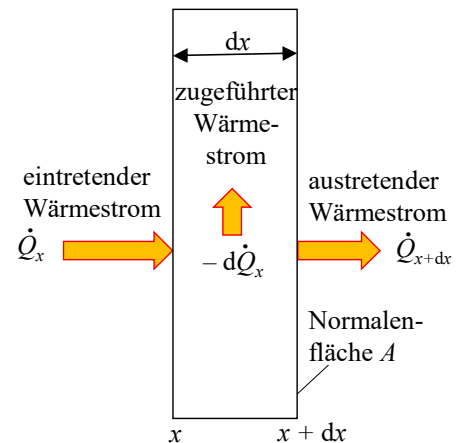
$$d\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_x = -A \lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2} dx. \quad (*)$$

Der dem Schichtvolumen ( $A dx$ ) zufließende Wärmestrom ( $-\dot{Q}_x$ ) erwärmt das Material in dieser Schicht mit dem Zeitgradienten  $d\vartheta/dt$ :

$$-d\dot{Q}_x = \rho A dx c \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Das Gleichsetzen mit Gl. (\*) liefert die bekannte FOURIERSche Differenzialgleichung für den eindimensionalen Fall:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = a \frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \quad (2)$$



## 2 Diffusion

In völliger Analogie zum Bild 1 zeigt Bild 2 den Vorgang in der Konzentrationsgrenzschicht  $\delta_K$ , die wiederum über  $x$  konstante Eigenschaften haben soll. Die Konzentration  $k$  stellt die Teilchenzahl pro Volumen dar. Es gelte der Diffusionskoeffizient  $D = \text{const}$ . Damit ergibt sich ein *linearer* Konzentrationsverlauf:

$$\frac{k - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{\delta_K} (x - x_1)$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k_2 - k_1}{\delta_K}.$$

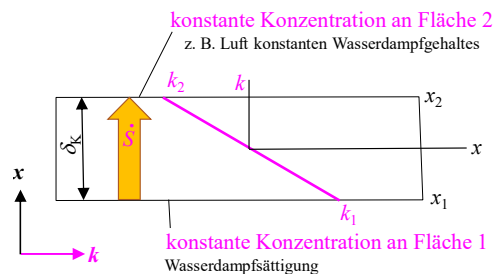


Bild 2 Diffusion in der Konzentrationsgrenzschicht

Der diffundierende Stoffstrom, der entgegen dem Konzentrationsgradienten  $dk/dx$  gerichtet ist, ergibt sich mit der Normalenfläche  $A$  und dem Diffusionskoeffizienten  $D$  nach dem bekannten FICKSchen Erfahrungsgesetz (1855) zu:

$$\dot{S} = -A D \frac{dk}{dx} \quad \left( \text{Dargestellter Sonderfall: } \dot{S} = -A D \frac{k_2 - k_1}{\delta_K} \right). \quad (3)$$

Würde die Diffusion instationär verlaufen, beispielsweise außerhalb der Konzentrationsgrenzschicht der eintretende Stoffstrom nicht komplett abgeleitet und Speichereffekte auftreten, kann in Analogie zur instationären Wärmeleitung unter Einsetzen des 1. FICKSchen Gesetzes gefolgt werden:

$$\dot{S}_x = -A D \frac{dk}{dx} \quad ; \quad \frac{d\dot{S}_x}{dx} = -A D \frac{d^2k}{dx^2}$$

$$\dot{S}_{x+dx} = \dot{S}_x + \frac{d\dot{S}_x}{dx} dx = -AD \frac{dk}{dx} - AD \frac{d^2k}{dx^2} dx$$

$$d\dot{S}_x = \dot{S}_{x+dx} - \dot{S}_x = -AD \frac{d^2k}{dx^2} dx. \quad (**)$$

Der dem Schichtvolumen ( $A dx$ ) zufließende Stoffstrom ( $-\dot{S}_x$ ) verbleibt in der Schicht und erhöht dort die Konzentration:

$$-d\dot{S}_x = A dx \frac{dk}{dt}.$$

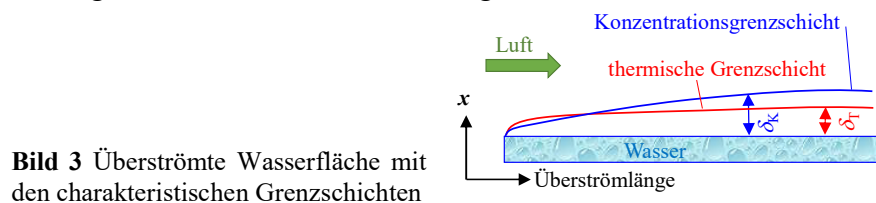
Das Gleichsetzen mit Gl. (\*\*) liefert das 2. FICKSche Gesetz, welches die erste Ableitung der Konzentration nach der Zeit mit der zweiten Ableitung der Konzentration nach dem Ort in Verbindung setzt, wobei wiederum lediglich der eindimensionale Fall betrachtet wurde. Es gilt:

$$\frac{dk}{dt} = D \frac{d^2k}{dx^2}. \quad (4)$$

Die Besonderheit besteht darin, dass im stationären und im instationären Fall der Koeffizient  $D$  gilt, während beim Wärmetransport im ersten Fall die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , aber im zweiten Fall die Temperaturleitfähigkeit  $a$  bedeutungsvoll ist. Dies liegt daran, dass die Teilchenzahländerung direkt die Konzentrationsänderung bewirkt, die Wärmestromänderung aber erst unter Berücksichtigung der Speicherkapazität  $\rho c$  zur Temperaturänderung führt.

## II. Turbulente Diffusion (konvektiver Stoffübergang)

Diese ist für den üblichen technischen Fall der Wasserverdunstung an Oberflächen relevant. So beispielsweise an freien Wasseroberflächen oder nassen Geweben (z. B. Wäschetrocknung), wenn diese einem Luftstrom ausgesetzt sind. Der Wärme- und Stoffaustausch vollzieht sich in der thermischen Grenzschicht bzw. in der Konzentrationsgrenzschicht. Ihre Dicken sind in der Regel unterschiedlich. Bild 3 zeigt die Verhältnisse an einer angeblasenen nassen Oberfläche.



**Bild 3** Überströmte Wasserfläche mit den charakteristischen Grenzschichten

Der konvektive Stoffübergang – wie die turbulente Diffusion im technischen Bereich auch genannt wird – erfolgt analog zur thermischen Konvektion. Somit gelten auch die analogen Zusammenhänge. Die spezielle Darstellung erfolgt mit der sogenannten Grenzschichttheorie [1].

In der Grenzschicht und in der turbulenten Unterschicht bei ausgebildeter turbulenter Strömung gilt in Analogie zum FOURIERSchen Gesetz das FICKSche Gesetz und daraus folgend die Definition des konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_K$  bzw. des Stoffübergangskoeffizienten  $\beta$ , wobei die Indizes auf die Grenzschichtbegrenzungen (Wasser, Luft) hinweisen:

$$\alpha_K = -\lambda \frac{\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_W}{\vartheta_W - \vartheta_L} \quad (5)$$

$$\beta = -D \frac{\left(\frac{dk}{dx}\right)_W}{k_W - k_L}. \quad (6)$$

In analoger Weise gelten für die mittleren Wärmeübergangskoeffizienten bzw. Stoffübergangskoeffizienten gemittelt über die Lauflänge  $L$  der Strömung:

$$\alpha_{K,m} = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L \alpha_K dx \quad (7)$$

$$\beta_m = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L \beta dx. \quad (8)$$

In der technischen Praxis sind stets die mittleren Koeffizienten interessant, weshalb im Weiteren der Index  $m$  weggelassen wird.

Für die thermische Konvektion sind mit Hilfe der NUSSELTschen Ähnlichkeitstheorie unter Verwendung von Ähnlichkeitskennzahlen die sogenannten Nusseltgleichungen empirisch gefunden worden. Für sie gelten für *erzwungene Strömung* in der Regel Beziehungen der Art

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (9)$$

Es bedeuten für die Nusseltzahl, die Reynoldszahl und die Prandtlzahl die Zusammenhänge

$$Nu = \frac{\alpha_K l}{\lambda}; \quad Re = \frac{w l}{\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} \quad (10)$$

mit den Größen

$\alpha_K$	W/(m <sup>2</sup> K)	Wärmeübergangskoeffizient
$l$	m	charakteristische Länge (z. B. Überströmlänge, Durchmesser)
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	kinematische Viskosität
$\lambda$	W/(m K)	Wärmeleitfähigkeit
$w$	m/s	Geschwindigkeit
$a$	m <sup>2</sup> /s	Temperaturleitfähigkeit
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
$c_p$	J/(kg K)	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck.

Im Falle feuchter Luft gilt nach [2] für  $\rho$  und  $c_p$  der Bezug auf die Gesamtmasse  $(1 + x)$ !

Die Berechnungen im wärmetechnischen Anwendungsbereich werden als bekannt vorausgesetzt (siehe eventuell [3]).

Die empirischen Untersuchungen des Verdunstungsvorganges ergaben nach [1] völlig analoge Ähnlichkeitsgleichungen zu Gl. (9), wobei die Nusseltzahl durch die Sherwoodzahl und die Prandtlzahl durch die Schmidtzahl zu ersetzen sind. Es gilt:

$$Sh = f(Re, Sc). \quad (11)$$

Es bedeuten für die Sherwoodzahl und die Schmidtzahl die Zusammenhänge

$$Sh = \frac{\beta l}{D}; \quad Sc = \frac{\nu}{D} \quad (12)$$

mit den zusätzlichen Größen

$\beta$	m/s	Stoffübergangskoeffizient	$\beta = D / \delta_K$	(+)
$D$	m <sup>2</sup> /s	Diffusionskoeffizient		
$\delta_K$	m	Grenzschichtdicke.		

Weiterhin wurde zu Ehren von LEWIS, der sich ausführlich mit der Verdunstung von Flüssigkeiten in Gase beschäftigte und 1922 eine entscheidende Veröffentlichung machte, die Lewiszahl definiert. Es handelt sich hierbei um den Quotienten

$$Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{a}{D} = \frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}. \quad (13)$$

Gilt beispielsweise für die Nusseltgleichung nach Gl. (9) der Zusammenhang

$$Nu = C Pr^n, \quad (14)$$

dann wäre die entsprechende Sherwoodgleichung

$$Sh = C Sc^n, \quad (15)$$

sodass für den Quotienten gilt:

$$\frac{Sh}{Nu} = \left(\frac{Sc}{Pr}\right)^n = Le^n. \quad (16)$$

Für Luft im Bereich  $\vartheta = 0 \dots 100$  °C gelten:  $Pr \approx 0,71$ ;  $Sc \approx 0,58$  !

Setzt man die Beziehungen für die Ähnlichkeitskennzahlen ein, folgen die Zusammenhänge:

$$\frac{\beta l}{D} \frac{\lambda}{\alpha_K l} = \frac{\beta}{D} \frac{\lambda}{\alpha_K} = Le^n \rightarrow \frac{\beta}{D} \frac{\lambda}{\alpha_K} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}\right)^n \xrightarrow{\text{Subst. Gl.(+)}} \frac{\beta}{\beta \delta_K} \frac{\lambda}{\alpha_K} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}\right)^n$$

$$\frac{\beta}{\beta \delta_K} \frac{\lambda}{\alpha_K} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}\right)^{+1} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}\right)^{n-1} \rightarrow \beta = \frac{\alpha_K}{\rho c_p} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p \beta \delta_K}\right)^{n-1} = \frac{\alpha_K}{\rho c_p} Le^{n-1}$$

$$\beta = \frac{\alpha_K}{\rho c_p} Le^{n-1}. \quad (17)$$

Der Exponent  $n$  stammt aus der Nusseltgleichung (14) und gibt den Einfluss von  $Pr$  an. In früher verwendeten Beziehungen galt für turbulent überströmte Platten beispielsweise

$$Nu = 0,037(Re^{0,8} - 23100) Pr^{0,33},$$

sodass daraus sofort  $n = 0,33$  folgte. Jetzt werden im Wärmetlas umfangreichere Gleichungen genannt, die auch das Übergangsgebiet (laminar - turbulent) beinhalten, wodurch keine so einfachen Beziehungen für  $n$  ablesbar sind. Es gilt z. B. nach [3] die Form

$$Nu = \left\{ 0,441 Re Pr^{0,667} + \frac{Re^{1,6} Pr^2}{[27,027 + 66,027 Re^{-0,1}(Pr^{0,667} - 1)]^2} \right\}^{0,5}. \quad (18)$$

Wertet man im üblichen Anwendungsbereich der Wasserverdunstung die Beziehung aus, so sind  $Nu = C Pr^n$  im Bereich von  $n = 0,44 \dots 0,55$  zu erwarten. – Um die Lewiszahl nach Gl. (13)

zu bestimmen, muss vorher mit der Schirmer-Approximation der Wasserdampf-Diffusionskoeffizient der Luft

$$D = \frac{0,083}{3600} \frac{101325 \text{ Pa}}{p} \left( \frac{T}{273,15 \text{ K}} \right)^{1,81} \text{ in } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (19)$$

mit dem real vorhandenen Luftdruck in Pa und der Lufttemperatur in K berechnet werden. Für die Temperaturleitfähigkeit für trockene Luft wird die Approximation nach [2] verwendet:

$$a = 1,88328 \cdot 10^{-5} + 1,286753 \cdot 10^{-7} \vartheta + 1,680101 \cdot 10^{-10} \vartheta^2 - 1,240072 \cdot 10^{-13} \vartheta^3 \text{ in } \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (20)$$

Für  $p = 1 \text{ bar}$  und Lufttemperaturen  $\vartheta = 10 \dots 100 \text{ }^\circ\text{C}$  folgen die Werte der Tabelle 1.

**Tabelle 1:** Ermittlung der Lewiszahlen  $Le$  in Abhängigkeit der Temperatur  $\vartheta$  für  $p = 1 \text{ bar}$  (trockene Luft)

$\vartheta$ in $^\circ\text{C}$	$D$ in $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$a$ in $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$Le = a / D$
10	2,49319	2,01362	0,808
20	2,65484	2,14725	0,809
40	2,9917	2,42407	0,810
60	3,34645	2,71314	0,811
80	3,71888	3,01386	0,810
100	4,10880	3,32564	0,809

Damit ergibt sich Gl. (17) zu

$$\beta = \frac{\alpha_K}{\rho c_p} 0,81^{-(0,56 \dots 0,45)} = (1,13 \dots 1,10) \frac{\alpha_K}{\rho c_p}. \quad [\beta \text{ in m/s}] \quad (21)$$

Meistens wird für die Wasserverdunstung in Luft näherungsweise die Beziehung

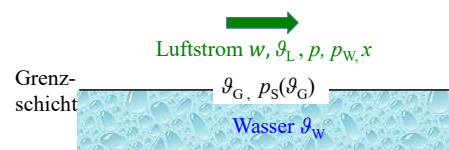
$$\beta \approx \frac{\alpha_K}{\rho c_p} \quad (22)$$

verwendet. Sie wird auch LEWISSche Beziehung oder LEWISSches Gesetz genannt.

### III. Praktische Berechnung des Wasserdampfstromes bei Verdunstung

Über die Wasseroberfläche  $A$  strömt ein Luftstrom mit den charakteristischen Größen  $w, \vartheta_L, p, p_W, x$ .

$w$	m/s	Geschwindigkeit
$\vartheta_L$	$^\circ\text{C}$	Lufttemperatur
$p$	Pa	Luftdruck
$p_W$	Pa	Partialdruck des Wasserdampfes in der Luft
$x$	kgW/kgL	Wasserdampfgehalt
$\vartheta_G$	$^\circ\text{C}$	Grenzschichttemperatur ( $\approx$ Wassertemperatur $\vartheta_G$ )
$p_s$	Pa	Sättigungsdruck bei $\vartheta_G$ ( $\equiv$ Dampfdruck des Wassers).



**Bild 4** Luftüberströmte Wasserfläche mit charakteristischen Größen

Der Wasserdampfgehalt kann beispielsweise nach [2, Gl. (2.4)]

$$x = 0,6222 \frac{p_W}{p_L} = 0,6222 \frac{p_W}{p - p_W} \quad \text{bzw.} \quad p_W = \frac{x}{0,6222 + x} p \quad (23)$$

berechnet oder dem  $h,x$ -Diagramm direkt entnommen werden.

In den Luftstrom hinein diffundiert der Wasserdampfstrom  $\dot{m}_W$ . Es gilt das FICKsche Gesetz mit dem Stoffübergangskoeffizienten  $\beta$ . Als spezielle Konzentrationen, die das treibende Potenzial bilden, gelten der Wasserdampf-sättigungsdruck  $p_S(\vartheta_G)$  an der Grenzschicht und der Wasserdampf-teildruck  $p_W$  in der Luft. Mit den vorgestellten Größen und dem Stoffübergangskoeffizienten  $\beta = D/\delta_K$  nimmt Gl. (3) die spezielle Form an:

$$\dot{m}_W = A \beta^* (p_S(\vartheta_G) - p_W). \quad [\text{z. B. } \beta^* \text{ in } \frac{\text{kg}_W}{\text{s m}^2 \text{Pa}}] \quad (24)$$

Diesen Zusammenhang für die Wasserverdunstung fand bereits DALTON (1803) lange bevor FICK sein allgemeingültiges Diffusionsgesetz (1855) formulierte. Der Druck wurde früher in Torr angegeben.

Man findet auch die Darstellung – beispielsweise in der VDI 2089 –

$$\dot{m}_W = A \beta \frac{p_S(\vartheta_G) - p_W}{R_W \bar{T}}, \quad [\text{z. B. } \beta \text{ in } \frac{\text{m}}{\text{h}}] \quad (24a)$$

wobei die neueingeführten Größen bedeuten:

$R_W$	J/(kg K)	Gaskonstante für Wasserdampf (461,4 J/(kg K))
$\bar{T}$	K	arithmetisches Mittel von Wasser- und Lufttemperatur.

Intuitiv kann man als treibendes Potential auch  $(x_S(\vartheta_G) - x)$  ansehen. Eine Herleitung aus den beiden vorstehenden Gleichungen gelingt für den Anwendungsbereich der Klimatechnik, da dort in der Regel nur Wasserdampfgehalte von  $x = 0 \dots 0,020 \text{ kg}_W/\text{kg}_{\text{L}}$  auftreten, sodass Gl. (23) mit einem maximalen Fehler von 3 % auch

$$p_W = \frac{x}{\underbrace{0,6222 + x}_{\approx 0,6222}} p \approx \frac{x}{0,6222} p \quad (25)$$

geschrieben werden kann. Mit dem *Verdunstungskoeffizienten*  $\sigma$  in  $\text{kg}_L/(\text{m}^2\text{s})$  folgt analog zu Gl. (24)

$$\dot{m}_W = \sigma(x_S(\vartheta_G) - x) A. \quad (26)$$

Damit ist das treibend Potenzial direkt aus dem  $h,x$ -Diagramm entnehmbar.

Zugehörig gilt das Lewissches Gesetz in der Form

$$\frac{\sigma c_p}{\alpha_K} \approx 1. \quad (27)$$

Diese beiden Gleichungen wurden uns in der "Klimavorlesung" vor fast 60 Jahren von unserem verehrten Prof. MACSKÁSY angeschrieben. Sie bildeten die Basis aller Berechnungen, die mit Verdunstungsvorgängen – beispielsweise in Sprühkammern – verbunden waren.

Selbstverständlich besteht eine inhaltliche Übereinstimmung zwischen den Gln. (22) und (27). Diese folgt aus dem Gleichsetzen der Gln. (24a) und (26) in mehreren Berechnungsschritten:

$$\beta \frac{p_S(\vartheta_G) - p_W}{R_W \bar{T}} = \sigma(x_S(\vartheta_G) - x) \rightarrow_{\text{Gl. (25)}} \rightarrow \beta \frac{p}{R_W \bar{T}} \frac{(x_S(\vartheta_G) - x)}{0,6222} = \sigma(x_S(\vartheta_G) - x)$$

mit der Dichte der feuchten Luft nach [2, Gl. (2.19)]

$$\rho = \frac{1 + x}{x + 0,6222} \frac{p}{R_W \bar{T}} \approx \frac{1}{0,6222} \frac{p}{R_W \bar{T}}$$

ergibt sich  $\beta \rho = \sigma$  und weiter mit Gl. (22)

$$\beta \approx \frac{\alpha_K}{\rho c_p} \rightarrow \sigma \approx \frac{\alpha_K}{c_p} \rightarrow \frac{\sigma c_p}{\alpha_K} \approx 1 \quad \text{w. z. b. w.}$$

### Geschichtlicher Rückblick

Nach [4] hat bereits LEWIS 1922 die Berechnungsgleichung (26) in seinem Buch "The evaporation of liquid into gas" angegeben. Mit der Einführung des genialen  $h,x$ -Diagramms für feuchte Luft durch MOLLIER hat sich diese Berechnungsgleichung für den Wärme- und Stoffaustausch mit feuchter Luft rasch etabliert. Man erkannte, dass die sogenannte LEWISSche Beziehung ("LEWISSches Gesetz")

$$\frac{\sigma c_p}{\alpha_K} \approx 1$$

sehr gut für Berechnungen der Wasserverdunstung nutzbar ist. Die sogenannte Dresdner Schule arbeitete intensiv mit den Gln. (26) und (27). Auf dieser Basis beruhte auch die Kühlturmbe-  
rechnung nach MERKEL mit seiner bekannten "Merkelschen Hauptgleichung" (1925). Auch die  
Verbesserungen durch MEHLIG (1966) behielt diesen Ansatz bei. Erst mit Nutzung der EDV  
wurde die Berechnung verfeinert. Details finden sich in [6, Seite 34].

Viele weitere in Dresden tätige Wissenschaftler nutzten uneingeschränkt das Gleichungspaar  
(26, 27), so beispielsweise BOŠNJAKOVIĆ, HÄUßLER, ELSNER, MACSKÁSY usw. BOŠNJAKOVIĆ  
formte mitunter Gleichungen des Stoff- und Wärmeaustausches so um, damit man die LEWIS-  
sche Beziehung vorteilhaft verwenden konnte.

Deshalb war mir unverständlich, wieso die VDI 2089 "Technische Gebäudeausrüstung von  
Schwimmbädern – Hallenbädern (2010)" eine derart unpraktische Berechnung der Wasserver-  
dunstung vornahm. Dagegen wurde mir klar, dass Anwender nach einfacheren Berechnungen  
suchten und schließlich in [5] ein Verfahren vorgestellt wurde, das nach 100 Jahren auf die  
LEWISSche Beziehung zurückkam und die absolute Feuchtedifferenz ( $x_S - x$ ) nutzte.

### Beispiel

Eine Wasserfläche der Größe  $20 \text{ m} \times 50 \text{ m}$  ( $\vartheta_W = 25 \text{ °C}$ ) wird mit Luft ( $w = 5 \text{ m/s}$ ,  $\vartheta_L = 20 \text{ °C}$ ,  
 $\varphi_L = 40 \%$ ,  $p = 1 \text{ bar}$ ) überströmt. Welcher Verdunstungsstrom ist zu erwarten?

Zur Lösung wurde eine spezielle Excel-Tabelle entworfen. Hierbei gelten:

- Beziehungen für feuchte Luft und Stoffwertapproximationen nach [2]
- Nusseltgleichung für überströmte Platten nach [3] gemäß Gl. (18)
- Verdunstungskoeffizient nach Gl. (27)
- Verdunstungsstrom nach Gl. (26).

Vereinfacht wurden die Stoffwerte für trockene Luft verwendet. Verbesserte Approximationen  
sind im Rechenprogramm für "Feuchte Luft" in <https://berndglueck.de/stoffwerte.php> hinter-  
legt. Die Unterschiede sind bei den Beispieldaten ( $\vartheta_L = 20 \text{ °C}$ ;  $\varphi_L = 40 \%$ ) vernachlässigbar:

	$\nu$ in $\text{m}^2/\text{s}$	$Pr$	$\lambda$ in $\text{W}/(\text{m K})$	$c_p$ in $\text{J}/(\text{kg K})$
trockene Luft	$15,35 \cdot 10^{-6}$	0,7148	$25,69 \cdot 10^{-3}$	1007
feuchte Luft	$15,34 \cdot 10^{-6}$	0,717	$25,62 \cdot 10^{-3}$	1012



Beispielrechnung mit erstelltem Excel-Programm:

Verdunstungsstrom von überströmten Wasserflächen an die Luft bei Temperaturen < 100 °C			
<b>Eingabewerte für Wasserfläche</b>			
A =	1000	m <sup>2</sup>	(Wasserfläche)
L =	20	m	(kleinste Seitenlänge)
θW =	25	°C	(Wassertemperatur)
<b>Eingabewerte für Luftstrom</b>			
w =	5	m/s	(Luftgeschwindigkeit)
θL =	20	°C	(Lufttemperatur)
φL =	40	%	(relative Luftfeuchte)
p =	1	bar	(Luftdruck)
<b>Ergebnisse</b>			
<b>Konvektiver Wärmeübergangskoeffizient der Luft an der Wasseroberfläche:</b>			
α <sub>K</sub> =	10,87	W/(m <sup>2</sup> K)	
<b>Verdunstungskoeffizient:</b>			
σ =	10,79	g/(m <sup>2</sup> s)	
<b>Verdunsteter Wasserstrom</b>			
mW =	562,355	kg/h	
Berechnete Hilfwerte für Wasser:			
p <sub>S</sub> =	3166	Pa	(Sättigungsdruck an der Grenzschicht bei θW)
x <sub>S</sub> =	0,0203	kgW/kgL	(Wasserdampfgehalt an der Grenzschicht bei θW)
Berechnete Hilfwerte für Luft:			
p =	100000	Pa	(Luftdruck)
p <sub>S</sub> =	2337	Pa	(Sättigungsdruck)
p <sub>W</sub> =	935	Pa	(Wasserdampfteildruck)
x =	0,0059	kgW/kgL	(Wasserdampfgehalt in der Luft)
ν =	1,535E-05	m <sup>2</sup> /s	(kinematische Viskosität)
Pr =	0,7148		(Prandtlzahl)
λ =	0,02569	W/(m K)	(Wärmeleitfähigkeit)
cp =	1006,8	J/(kg K)	(spezifische Wärmekapazität)
Re =	6514884		(Reynoldszahl)
Nu =	8459,72		(Nusseltzahl)
Wenn x <sub>S</sub> <= x, dann keine Verdunstung!			
Die Berechnung der Stoffwerte erfolgt näherungsweise für trockene Luft.			
Berechnung der Hilfs- und Stoffwerte nach [2]: Buch "Stoffwerte" <a href="https://berndglueck.de/stoffwerte.php">https://berndglueck.de/stoffwerte.php</a>			
Berechnung der Nusseltgleichung nach [3]: Buch "Wärmeübertragung" Gl. (3.38) <a href="https://berndglueck.de/waermeuebertragung.php">https://berndglueck.de/waermeuebertragung.php</a>			

Die Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_K$  ist relativ unsicher, da die Luftgeschwindigkeit im praktischen Einsatzfall nur schwer bestimmbar ist, denn sie wird z. B. bei Freiflächen nicht über einen bestimmten Zeitraum konstant sein. Außerdem ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Luft maßgebend, die an Oberflächen von Whirlpools nur geschätzt werden kann. Selbst die Wasseroberfläche ist bei Wellengang nur annähernd ermittelbar. *Damit ist die Verdunstungsberechnung in der Realität nur näherungsweise möglich.*

Für eine einfache Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten kann nach [3, Seite 115, Gl. (\*\*\*)] Verwendung finden:

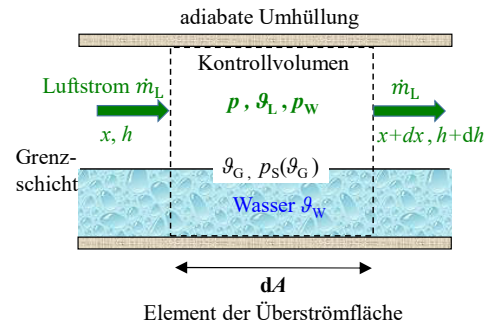
$$\alpha_K = 6,9 \frac{w^{0,72}}{L^{0,26}} \quad \text{in W/(m}^2\text{K)}. \quad (28)$$

Im Beispiel ergäbe sich für  $L = 20$  m und  $w = 5$  m/s:  $\alpha_K = 10,1$  W/(m<sup>2</sup>K). Damit hätte man die Berechnung auch bedeutend einfacher vollziehen können. Unter Annahme von  $c_p \approx 1$  kJ/(kg K) wäre sogar der Verdunstungskoeffizient mit der gleichen Approximation zu ermitteln:

$$\sigma = 6,9 \frac{w^{0,72}}{L^{0,26}} \quad \text{in g/(m}^2\text{s)}. \quad (29)$$

#### IV. Verallgemeinerung des Stoff- und Wärmetransports bei Wasser-Luft-Kontakt

Der gekoppelte Stoff- und Wärmetransport wird im Bild 5 veranschaulicht. Über die Wasseroberfläche  $dA$  strömt ein Luftstrom  $\dot{m}_L$ . In diesen hinein diffundiert der Wasserdampfstrom  $\dot{m}_W$ .



**Bild 5** Überströmte Wasseroberfläche mit Kontrollvolumen über dem Flächenelement  $dA$

Die Bilanz um die Grenzfläche ergibt folgende Terme:

- Enthalpiezustrom an die Luft durch aufgenommenen Wasserdampfstrom
 
$$h_W d\dot{m}_W = h_W \dot{m}_L dx \quad (h_W \text{ für dampfförmiges Wasser bei } \vartheta_G)$$
- Enthalpiezustrom an die Luft durch konvektiven Wärmestrom von der Grenzfläche
 
$$\alpha_L (\vartheta_G - \vartheta_L) dA$$
- Enthalpieabfluss vom Wasser durch abfließenden Wasserstrom
 
$$h'_W d\dot{m}_W = h'_W \dot{m}_L dx \quad (h'_W \text{ für flüssiges Wasser bei } \vartheta_W)$$
- Enthalpieabfluss vom Wasser durch konvektiven Wärmestrom an die Grenzfläche
 
$$\alpha_W (\vartheta_W - \vartheta_G) dA.$$

Wegen der adiabaten Kapselung des Kontrollvolumens ergibt die Bilanz

$$h_W \dot{m}_L dx + \alpha_L (\vartheta_G - \vartheta_L) dA = h'_W \dot{m}_L dx + \alpha_W (\vartheta_W - \vartheta_G) dA \quad (30)$$

und unter Berücksichtigung der Gl. (26)  $d\dot{m}_W = \dot{m}_L dx = \sigma(x_s(\vartheta_G) - x) dA$  folgt die bekannte Darstellung

$$\alpha_W (\vartheta_W - \vartheta_G) = (h_W - h'_W) \sigma(x_s(\vartheta_G) - x) + \alpha_L (\vartheta_G - \vartheta_L). \quad (31)$$

Um die Richtung der jeweiligen Zustandsänderung zu erkennen, bildet man den Quotienten aus der Zunahme der Luftenthalpie und der Wasserdampfzunahme

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_W \dot{m}_L dx + \alpha_L (\vartheta_G - \vartheta_L) dA}{\dot{m}_L dx} = \frac{h_W \sigma(x_s(\vartheta_G) - x) + \alpha_L (\vartheta_G - \vartheta_L)}{\sigma(x_s(\vartheta_G) - x)}. \quad (32)$$

Für Zustandsänderungen unter konstanten Bedingungen ist es sinnvoll zum Differenzenquotienten überzugehen. Somit ergibt sich der Anstieg im  $h,x$ -Diagramm zu

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\frac{\alpha_L}{\sigma} (\vartheta_G - \vartheta_L) + h_W (x_S(\vartheta_G) - x)}{(x_S(\vartheta_G) - x)}. \quad (33)$$

Damit können die vielfältigen Zustandsänderungen der feuchten Luft bei unterschiedlichen Bedingungen erklärt werden.

- *Stationärer Zustand bei adiabater Kühlung der Luft*

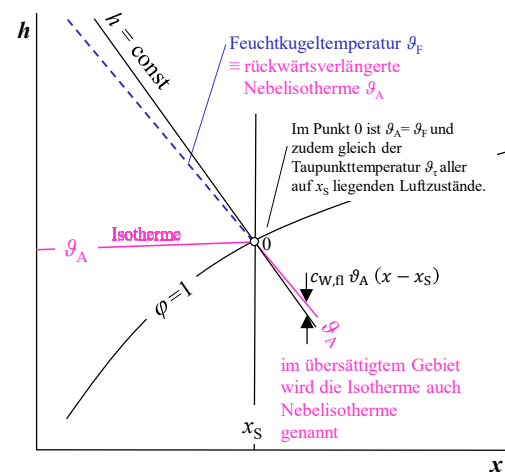
Bekommt das im Bild 5 dargestellte Wasserreservoir vom Inneren keinen Wärmenachschub, so wird sich nach kurzer Zeit ein stationärer Zustand ( $\vartheta_G = \vartheta_W = \vartheta_L$ ) einstellen. Die Energie zur Wasserverdampfung wird von der Luft entnommen. Nur die Enthalpie des flüssigen Wassers  $c_{W,\text{fl}} \vartheta_W$  wird dem System noch zugeführt, sodass gilt:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{c_{W,\text{fl}} \vartheta_W \sigma (x_S(\vartheta_G) - x)}{\sigma (x_S(\vartheta_G) - x)} = c_{W,\text{fl}} \vartheta_W. \quad (34)$$

Der Verlauf  $\Delta h/\Delta x$  weicht somit geringfügig von der Isenthalpen ab, es handelt sich um die Feuchtkugeltemperatur  $\vartheta_F$ , die identisch mit der rückwärts – ins ungesättigte Gebiet – verlängerten Nebelisotherme  $\vartheta_A$  ist (Bild 6).

Bei einem adiabaten Luftwäscher würden alle auf  $\vartheta_F$  liegenden Luft Eintrittszustände entlang dieser Feuchtkugelisothermen verändert. Die Annäherung an den Punkt 0 ist abhängig vom Wirkungsgrad des Wäschers.

**Bild 6** Adiabate Zustandsänderung entlang der Nebelisotherme gemäß Gl. (34)



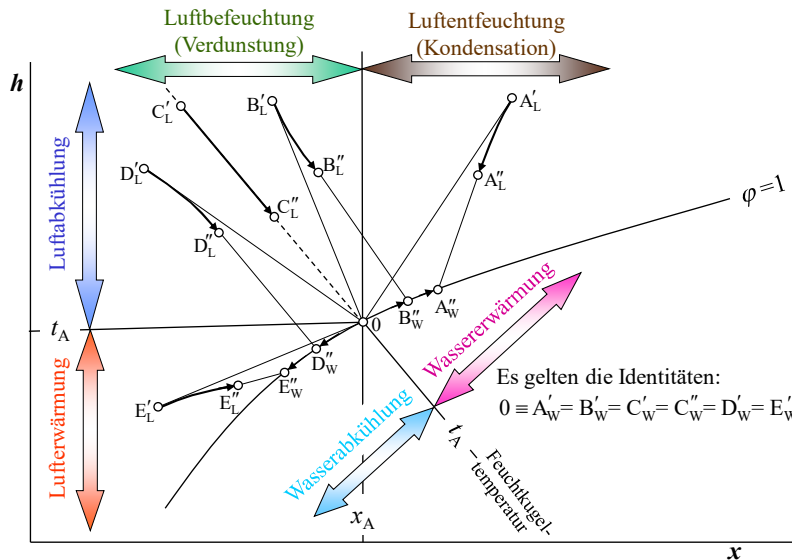
Bekannt ist der Sonderanwendungsfall des ASSMANNschen Aspirationspsychrometers. Ein Thermometer mit einem trockenen Fühler und ein Thermometer mit feuchtem Gewebe umhüllten Fühler werden einem intensiven Luftstrom mittels eingebautem Ventilator ausgesetzt. Haben die Fühler zunächst gleiche Temperaturen, kühlt sich das Wasser im Gewebe rasch ab, bis ein stationärer Zustand erreicht ist. Die Wassertemperatur sank entlang  $\varphi = 1$  bis zur sogenannten *Kühlgrenztemperatur* ab. Es ist die niedrigste Wassertemperatur, die bei adiabater Verdunstung durch Luft erreichbar ist. Sie entspricht  $\vartheta_F$ . Mit Kenntnis dieser Temperatur und der Lufttemperatur  $\vartheta_L$  – gemessen mit dem trockenem Thermometerfühler – kann im  $h,x$ -Diagramm der reale Luftzustand (Schnittpunkt von  $\vartheta_F$  und  $\vartheta_L$ ) gefunden werden.

- *Luftzustandsänderungen bei Wärmezufuhr- oder -abfuhr an das Wasserreservoir*

In diesem Fall gilt die Gl. (33) in vollem Umfang, wobei die Richtung der Luftzustandsänderung  $\Delta h/\Delta x$  von zahlreichen Parametern abhängt.

Die *Qualität* der Luftzustandsänderung wird durch die Lage des Luft Eintrittszustandes und die des Wassereintritts im  $h,x$ -Diagramm bestimmt. Es treten auf: Luftabkühlung, Luftentfeuchtung durch Kondensation, Lufterwärmung und Luftbefeuchtung durch Verdunstung. Die *Quantität* der Zustandsänderung wird durch die Intensität des Austausches beeinflusst. Einen Überblick über die Möglichkeiten der Zustandsänderung gibt Bild 7.

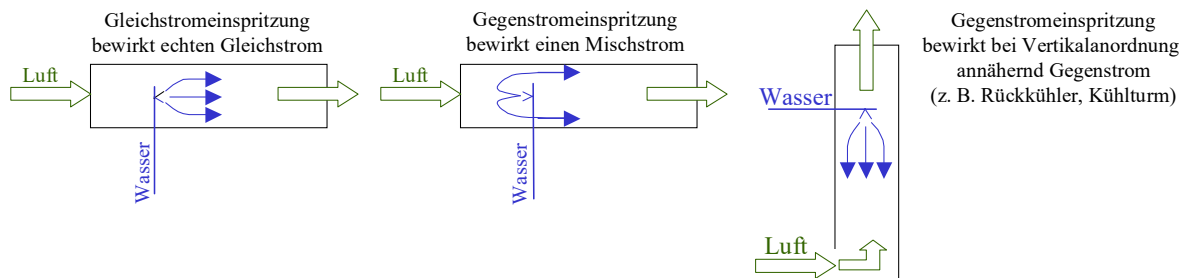
Wenn ein Wasserstrom in einem Luftstrom verdunstet wird (z. B. Sprühkammer einer Klimaanlage, Kühlturm) kommt es zum Wärme- und Stoffaustausch. Die Intensität hängt von der Konstruktion, den Strömungsgeschwindigkeiten, der Strömungsart (Gleich- oder Gegenstrom), den thermodynamischen Zuständen (Temperaturen, Luftfeuchtigkeit), den Massestromverhältnissen usw. ab.



**Bild 7** Mögliche Zustandsänderungen der Luft ( $\vartheta_L$  und  $x_L$ ) und des Wassers ( $\vartheta_W$ ) in Abhängigkeit ihrer Größen, des Massestromverhältnisses und des Kontaktes

Es gelten die Identitäten:  
 $0 \equiv A'_W = B'_W = C'_W = C''_W = D'_W = E'_W$

In Luftwäschern wird meistens mit dem Gleichstrombetrieb gearbeitet, da sich reiner Gegenstrom bei Horizontalanordnungen kaum realisieren lässt (Tröpfchenniederschlag an den Wänden). Er kann annähernd bei Vertikalordnungen (Kühlturm) erreicht werden, wobei der Schwerkrafteinfluss genutzt wird.



**Bild 8** Beispiele technischer Möglichkeiten der Stromführung in Luftwäschern und Kühltürmen

Die qualitativen Besonderheiten sind abhängig von der Lage des Luftzustandes im  $h,x$ -Diagramm und von der Wassertemperatur. Es bedeuten:

- $A_L, B_L, C_L, D_L, E_L$  Luftzustände
- $A_W, B_W, C_W, D_W, E_W$  Wasserzustände (gleiche Buchstaben kennzeichnen zusammengehörige Betriebsfälle)
- ' ; '' Eintritt; Austritt des Luft- bzw. Wasserstromes.

Wasserseitig ist der Grenzflächenzustand entscheidend. Er wird im  $h,x$ -Diagramm für feuchte Luft bei der entsprechenden Wassertemperatur auf  $\varphi = 1$  abgebildet. Als Ausgangspunkt gilt bei den weiteren Betrachtungen der Punkt 0, er verkörpert den Eintrittszustand des Wassers für alle Betriebsfälle ( $A'_W; B'_W; C'_W; D'_W; E'_W$ ).

Wenn der Wasserstrom durch den Luftstrom abgekühlt oder aufgewärmt wird, d. h. sich die

Wassertemperatur während des Vorganges ändert, verlagert sich der Zustandspunkt auf der Sättigungslinie  $\varphi = 1$ . Die Austrittszustände sind:  $(A''_w; B''_w; C''_w; D''_w; E''_w)$ . Selbstverständlich ändert sich der Luftzustand dann auch längs einer Kurve zwischen  $(A'_L; B'_L; C'_L; D'_L; E'_L)$  und  $(A''_L; B''_L; C''_L; D''_L; E''_L)$ . Die Kurvenform kann anschaulich punktweise konstruiert werden, indem zwischen dem jeweiligen Luftzustandspunkt und dem zugehörigen Wasserzustandspunkt (er wird oftmals als "ziehender" Punkt bezeichnet) eine Gerade aufgespannt wird. Für einen kurzen Zeitabschnitt erfolgt die Änderung des Luftzustandes längs dieser Geraden. Im obigen Bild sind die jeweiligen Geraden für den Beginn und für das Ende der Zustandsänderung eingetragen.

Für alle signifikanten Zustandsänderungen sind Beispiele angegeben:

- A Luftabkühlung; Luftentfeuchtung; Wassererwärmung; Gleichstrom
- B Luftabkühlung; Luftbefeuchtung; Wassererwärmung; Gleichstrom
- C Luftabkühlung; Luftbefeuchtung; Wasser bei konstanter Temperatur (Sonderfall: sogenannte "adiabate" Luftkühlung)
- D Luftabkühlung; Luftbefeuchtung; Wasserabkühlung; Gleichstrom
- E Lufterwärmung; Luftbefeuchtung; Wasserabkühlung; Gegenstrom.

Ist bei den Fällen A, B, D, E das Wasser / Luft-Verhältnis sehr groß, dann entspricht die jeweilige Wasseraustrittstemperatur nahezu der Wassereintrittstemperatur und die Zustandsänderungen für Luft liegen angenähert auf einer Geraden. Die analogen Verhältnisse liegen vor, wenn der Luftstrom über eine große Wasseroberfläche konstanter Temperatur strömt.

Das betrachte Beispiel (Seite 8) entspricht dem Fall D, wobei die Wassertemperatur als unveränderlich zu betrachten ist.

## Literatur

- [1] BAEHR, H.D.; STEPHAN, K.: Wärme- und Stoffübertragung, 6. Auflage. Springer-Verlag 2008
- [2] GLÜCK, B.: Zustands- und Stoffwerte (Wasser, Dampf, Luft), 2. Auflage. Berlin: Verlag für Bauwesen 1991 <https://berndglueck.de/stoffwerte.php>
- [3] GLÜCK, B.: Wärmeübertragung, Wärmeabgabe von Raumheizflächen und Rohren, 2. Auflage. Berlin: Verlag für Bauwesen 1990 <https://berndglueck.de/waermeuebertragung.php>
- [4] ELSNER, N.; DITTMANN, A.: Grundlagen der Technischen Thermodynamik, Band 1, 8. Auflage. Berlin: Akademie Verlag 1993
- [5] FIEDLER, E., KALUZA, J.: Vereinfachte Berechnung des Wärme- und Stoffübergangs an Wasseroberflächen. HLH Bd. 73 (2022) Nr. 10
- [6] SCHULZE, T.: Gleichungsorientierte Modellierung der Wärme- und Stoffübertragungsprozesse in Verdunstungskühltürmen, Dissertation TU Dresden 2014 <https://d-nb.info/107672535X/34>